



## Peranan Aljabar Linier dalam Teknik Geomatika: Sebuah Tinjauan Matematis dan Aplikatif

### *The Role of Linear Algebra in Geomatics Engineering: A Mathematical and Applied Review*

Suprapto\*

Program Studi Teknik Geomatika, Fakultas Teknologi Mineral dan Energi, Universitas Pembangunan Nasional "Veteran" Yogyakarta. Jalan SWK 104 (Lingkar Utara) Condongcatur, Depok, Sleman, Yogyakarta 55283

\*Corresponding Author: [suprapto@geomatika7280@upnyk.ac.id](mailto:suprapto@geomatika7280@upnyk.ac.id)

#### Article Info:

Received: 06 - 08 - 2025

Accepted: 14 - 10 - 2025

Published: 31 - 10 - 2025

**Kata kunci:** Aljabar Linier, Transformasi Koordinat, Pemrosesan Citra, SIG, Model Permukaan

**Abstrak:** Tujuan dari penelitian ini adalah menyajikan tinjauan komprehensif terhadap landasan matematis teoritis aljabar linier, meliputi ruang vektor, matriks, transformasi linier, nilai dan vektor eigen, serta menunjukkan relevansi dan peranannya dalam praktik teknik geomatika. Kebaruan dari penelitian ini terletak pada penyajian dual perspektif, yaitu menampilkan konsep matematis teoritis sekaligus signifikansi aplikatifnya dalam teknik geomatika. Dalam penelitian ini ditampilkan beberapa studi kasus seperti transformasi sistem koordinat, pemrosesan citra penginderaan jauh, operasi spasial dalam SIG, serta interpolasi model permukaan. Hasil penelitian ini menunjukkan bahwa aljabar linier memiliki peranan yang sangat penting dalam bidang-bidang teknik geomatika.

**Keywords:** Linear Algebraic, Coordinate Transformation, Image Processing, GIS, Surface Models

**Abstract:** The purpose of this study is to present a comprehensive review of the theoretical mathematical foundations of linear algebra, including vector spaces, matrices, linear transformations, eigenvalues, and eigenvectors, while demonstrating their relevance and role in geomatics engineering practice. The novelty of this research lies in its dual perspective, which simultaneously presents the theoretical mathematical concepts and their applied significance in geomatics engineering. This study highlights several case studies, such as coordinate system transformation, remote sensing image processing, spatial operations in GIS, and surface model interpolation. The results show that linear algebra plays a crucial role in various areas of geomatics engineering.

#### How to Cite:

Suprapto (2025). Peranan Aljabar Linier dalam Teknik Geomatika: Sebuah Tinjauan Matematis dan Aplikatif. *Jurnal Ilmiah Geomatika*, 5(2), 47-62. <https://doi.org/10.31315/imagi.v5i2.15417>.

## 1. PENDAHULUAN

Teknik Geomatika merupakan cabang ilmu rekayasa yang berfokus pada pengumpulan, pengolahan, analisis, dan penyajian informasi geospasial. Bidang ini mencakup beragam aspek seperti survei dan pemetaan, sistem informasi geografis (SIG), penginderaan jauh, fotogrametri, geodesi, serta pemodelan permukaan bumi. Perkembangan teknologi penginderaan dan sistem navigasi global (seperti GNSS) telah mendorong kebutuhan akan pengolahan data geospasial dalam jumlah besar dan dengan ketelitian tinggi (Bill et al., 2022; Hassan et al., 2020; Jensen, 2004). Dalam konteks ini, matematika khususnya aljabar linier berperan sentral sebagai kerangka teoritis sekaligus alat praktis dalam memodelkan dan menyelesaikan berbagai permasalahan spasial.

Aljabar linier adalah cabang matematika yang mempelajari ruang vektor, sistem persamaan linear, transformasi linier, dan struktur matriks. Konsep-konsep tersebut menjadi landasan bagi banyak proses komputasi dalam teknik geomatika. Sebagai contoh, representasi titik dalam ruang tiga dimensi menggunakan vektor koordinat, transformasi sistem koordinat menggunakan matriks rotasi dan translasi, serta pemrosesan citra satelit yang melibatkan transformasi affine dan reduksi dimensi data melalui analisis komponen utama atau *principal component analysis* (PCA). Semua proses ini bertumpu pada prinsip-prinsip aljabar linier (Anton & Rorres, 2000, 2014), (Pommaret, 2018), (Ascher & Petzold, 1998), dan (Agarwal & Flaut, 2017; Stroch, 2024).

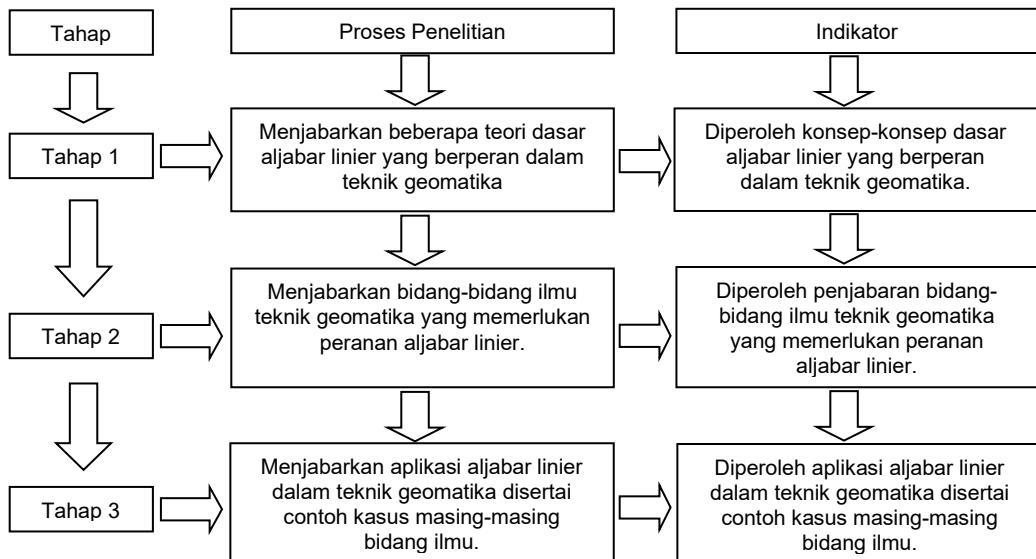
Dalam survei geodetik dan pemetaan topografi, sistem koordinat yang digunakan sering kali perlu dikonversi antara sistem global (seperti WGS84) dan sistem lokal. Konversi ini dilakukan melalui transformasi linier yang melibatkan operasi matriks. Demikian pula, dalam pengolahan citra penginderaan jauh, citra sering mengalami distorsi geometrik akibat posisi sensor, topografi, dan orientasi platform. Koreksi distorsi ini dilakukan dengan menggunakan transformasi matriks berbasis model geometrik.

Lebih lanjut, dalam pengembangan model digital elevasi (DEM) dan interpolasi spasial, metode kuadrat terkecil (least squares) digunakan untuk mencari solusi optimal dari sistem persamaan linier yang overdetermined. Teknik ini menjadi krusial untuk meningkatkan akurasi model permukaan dan estimasi ketinggian (Zhou et al., 2023; Hassan et al., 2020).

Melihat luasnya penerapan aljabar linier dalam proses-proses inti teknik geomatika, maka menjadi penting untuk memahami hubungan antara aspek matematis dan aplikatifnya secara mendalam. Pemahaman ini tidak hanya memperkuat kemampuan analisis, tetapi juga memungkinkan pengembangan algoritma dan perangkat lunak pemetaan yang lebih efisien dan presisi (Kopylova et al., 2023), (Tang & Feng, 2017), (Ghilani, 2010), (Quattrochi & Goodchild, 2023), (Foody, 2010), dan (Jensen, 2004; Unger Holtz, 2007).

## 2. METODE PENELITIAN

Penelitian ini merupakan studi literatur yang meninjau berbagai sumber ilmiah seperti buku, jurnal, dan artikel penelitian terkait penerapan aljabar linier dalam teknik geomatika. Pertama, penelitian ini menjabarkan dasar-dasar teori aljabar linier yang berperan penting dalam metode geomatika, seperti konsep matriks, vektor, dan transformasi linier yang digunakan dalam pemodelan spasial serta pengolahan data geospasial. Kedua, penelitian ini menguraikan bidang-bidang dalam teknik geomatika yang membutuhkan aljabar linier, seperti survei dan pemetaan, fotogrametri, penginderaan jauh, SIG, dan geodesi. Ketiga, penelitian ini membahas berbagai aplikasi aljabar linier dalam geomatika, seperti perhitungan koordinat, transformasi sistem koordinat, kalibrasi citra, serta pemrosesan data point cloud dan model elevasi digital, disertai contoh kasus penerapannya.



Gambar 1. Tahap-tahap penelitian

### 3. DASAR TEORI ALJABAR LINIER

Semua konsep aljabar linier yang dipaparkan dan dibahas pada bab 3 ini dapat ditemukan pada (Agarwal & Flaut, 2017; Anton & Rorres, 2000, 2014; Pommaret, 2018; Stroch, 2024). Lebih lanjut tentang konsep-konsep dasar aljabar linier dipaparkan dalam subbab-subbab berikut.

#### 3.1. Vektor dan Ruang Vektor

Vektor dalam konteks aljabar linier merupakan objek matematis yang memiliki besaran (magnitudo) dan arah. Vektor dinyatakan sebagai urutan bilangan yang dapat direpresentasikan dalam bentuk kolom atau baris, seperti berikut

$$v = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} \quad \text{atau} \quad v = [v_1 \ v_2 \ \dots \ v_n]$$

Di bidang teknik geomatika, vektor digunakan untuk merepresentasikan koordinat titik di ruang dua dimensi (2D) maupun tiga dimensi (3D), posisi relatif antara dua titik, maupun arah dan besaran perpindahan. Sebagai contoh, posisi suatu titik  $P$  di ruang 3D dalam sistem koordinat Kartesian dapat dituliskan sebagai vektor:

$$P = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

Operasi dasar terhadap vektor seperti penjumlahan, pengurangan, dan perkalian skalar sangat berguna dalam manipulasi koordinat, transformasi posisi, serta perhitungan jarak dan sudut antar titik. Selain itu, produk titik (*dot product*) dan produk silang (*cross product*) sering digunakan dalam analisis arah dan ortogonalitas vektor dalam ruang 3D, seperti untuk menentukan arah normal bidang atau orientasi kamera dalam fotogrametri.

Ruang vektor (vector space) adalah himpunan vektor yang memenuhi sifat-sifat tertentu terhadap dua operasi, yaitu penjumlahan vektor dan perkalian dengan skalar. Diberikan  $v, w, u, \mathbf{0} \in \mathcal{R}$  dan  $c \in \mathcal{F}$ , maka  $(\mathcal{R}, +, *)$  dikatakan ruang vektor jika memenuhi aksioma berikut

- a. Penutupan terhadap penjumlahan dan perkalian scalar

Untuk setiap  $v, w \in \mathcal{R} \Rightarrow v + w \in \mathcal{R}$  dan  $v \in \mathcal{R}, c \in \mathcal{F} \Rightarrow cv \in \mathcal{R}$

- b. Asosiatif dan komutatif terhadap penjumlahan

- Untuk setiap  $v, w, u \in \mathcal{R} \Rightarrow (v + w) + u = v + (w + u)$  dan  $v + w = w + v$
- Adanya elemen nol dan invers aditif  
 Terdapat  $\mathbf{0} \in \mathcal{R}$  dan untuk setiap  $v \in \mathcal{R}$ , berlaku  $\mathbf{0} + v = v + \mathbf{0} = v$   
 Untuk setiap  $v \in \mathcal{R}$ , terdapat  $-v \in \mathcal{R}$ , sehingga berlaku  $v + (-v) = -v + v = \mathbf{0}$
  - Distribusi skalar terhadap penjumlahan vektor dan terhadap penjumlahan skalar  
 Untuk setiap  $v, w \in \mathcal{R}$  dan  $c \in \mathcal{F}$ , berlaku  $c(v \pm w) = cv \pm cw$
  - Asosiatif terhadap perkalian skalar  
 Untuk setiap  $v \in \mathcal{R}$  dan  $c, d \in \mathcal{F}$ , berlaku  $c * (d * v) = (c * d) * v$
  - Identitas salar  
 Terdapat  $\mathbf{1} \in \mathcal{F}$  dan untuk setiap  $v \in \mathcal{R}$ , berlaku  $\mathbf{1} * v = v * \mathbf{1} = v$

Contoh umum dari ruang vektor dalam teknik geomatika adalah:

$\mathbb{R}^2$  : ruang vektor dua dimensi, merepresentasikan bidang horizontal ( $x - y$ )

$\mathbb{R}^3$  : ruang vektor tiga dimensi, digunakan untuk pemetaan posisi spasial dalam koordinat ( $x, y, z$ )

Dalam konteks geometris, himpunan titik-titik hasil transformasi koordinat membentuk subruang dari ruang vektor. Sekumpulan titik hasil translasi atau rotasi tetap berada dalam  $\mathbb{R}^2$  atau  $\mathbb{R}^3$ , yang merupakan ruang vektor. Ruang vektor juga menjadi dasar untuk memahami konsep basis dan dimensi. Basis adalah himpunan vektor bebas linear yang dapat digunakan untuk menyusun setiap vektor dalam ruang tersebut melalui kombinasi linier. Dalam geomatika, hal ini berguna saat merumuskan sistem koordinat lokal yang berbeda dari sistem koordinat global, atau ketika mendefinisikan orientasi bidang dalam fotogrametri. Dalam aljabar linier, suatu vektor dapat dibentuk dari kombinasi linier vektor-vektor lainnya, yaitu:

$$v = a_1 v_1 + a_2 v_2 + \cdots + a_n v_n$$

Jika kombinasi linier tersebut hanya memiliki satu solusi trivial ( $a_i = 0$  untuk semua  $i \in I$ ), maka vektor-vektor tersebut adalah bebas linear. Sebaliknya, jika terdapat solusi non-trivial, maka vektor-vektor tersebut saling bergantung linear. Dalam teknik geomatika, konsep ini penting dalam analisis jaringan geodetik untuk memastikan bahwa titik-titik kontrol memiliki konfigurasi yang cukup kuat (tidak kolinear) untuk mendukung transformasi spasial yang akurat.

### 3.2. Matriks dan Operasi Matriks

Matriks merupakan susunan bilangan berbentuk persegi panjang yang disusun dalam baris dan kolom. Matriks digunakan secara luas dalam aljabar linier untuk merepresentasikan dan melakukan operasi terhadap sistem persamaan linier, transformasi linier, serta manipulasi data dalam bentuk tabel. Sebuah matriks  $A$  berordo  $m \times n$  memiliki  $m$  baris dan  $n$  kolom, dan dituliskan sebagai:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Dalam teknik geomatika, matriks sangat berguna dalam proses transformasi koordinat, rotasi, refleksi, dan skala. Misalnya, untuk mentransformasi koordinat dari satu sistem referensi ke sistem lainnya, digunakan matriks rotasi dan translasi.

#### i. Operasi Dasar Matriks

##### 1. Penjumlahan dan Pengurangan Matriks

Dua matriks dapat dijumlahkan atau dikurangkan jika memiliki ukuran (ordo) yang sama. Operasi ini dilakukan dengan menjumlahkan atau mengurangkan elemen-elemen yang bersesuaian:

$$A + B = \begin{bmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \cdots & a_{1n} + b_{1n} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & \cdots & a_{2n} + b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} + b_{m1} & a_{m2} + b_{m2} & \cdots & a_{mn} + b_{mn} \end{bmatrix}$$

##### 2. Perkalian Skalar

Setiap elemen dalam matriks dikalikan dengan suatu bilangan skalar  $k$ :

$$kA = \begin{bmatrix} ka_{11} & ka_{12} & \cdots & ka_{1n} \\ ka_{21} & ka_{22} & \cdots & ka_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ ka_{m1} & ka_{m2} & \cdots & ka_{mn} \end{bmatrix}$$

### 3. Perkalian Matriks

Matriks  $A$  berukuran  $m \times n$  dapat dikalikan dengan matriks  $B$  berukuran  $n \times p$ , menghasilkan matriks  $C$  berukuran  $m \times p$ :

$$C = AB, \text{ yakni } c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj}$$

Operasi ini banyak digunakan dalam transformasi geospasial, di mana satu atau beberapa vektor posisi dikalikan dengan matriks transformasi.

#### ii. Matriks Identitas dan Matriks Invers

- Matriks Identitas ( $I$ ) adalah matriks persegi yang memiliki elemen 1 di diagonal utama dan 0 di luar diagonal:

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

Dalam operasi transformasi, matriks identitas berfungsi seperti angka 1 dalam perkalian biasa tidak mengubah vektor yang dikalikan dengannya.

- Matriks Invers ( $A^{-1}$ ) adalah matriks yang memenuhi:

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I$$

Matriks invers digunakan untuk membalik transformasi, misalnya mengembalikan titik dari sistem koordinat target ke sistem sumber.

#### iii. Determinan Matriks

Determinan adalah nilai skalar yang dapat dihitung dari matriks persegi dan memiliki banyak arti penting, salah satunya adalah untuk menentukan apakah suatu matriks memiliki invers (jika determinan tidak nol). Dalam konteks geospasial:

- Determinan dari matriks transformasi dapat digunakan untuk mengetahui apakah transformasi tersebut mempertahankan orientasi spasial.
- Determinan juga dapat digunakan untuk menghitung luas atau volume yang mengalami transformasi linier.

#### iv. Transpos dan Simetri

Transpos ( $A^T$ ) dari matriks adalah matriks yang diperoleh dengan menukar baris menjadi kolom:

$$A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} \text{ maka } A^T = \begin{bmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{bmatrix}$$

Transpos sering digunakan dalam perhitungan *dot product* dan dalam metode *least squares*.

Matriks disebut simetris jika  $A = A^T$ , yang sering muncul dalam sistem persamaan normal dalam analisis regresi dan pemodelan permukaan.

### 3.3. Transformasi Linier

Transformasi linier adalah fungsi atau pemetaan dari satu ruang vektor ke ruang vektor lainnya yang mempertahankan operasi penjumlahan vektor dan perkalian skalar. Suatu transformasi  $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  dikatakan linier jika untuk setiap vektor  $u, v \in \mathbb{R}^n$  dan skalar  $c \in \mathbb{R}$ , berlaku:

1.  $T(u + v) = T(u) + T(v)$
2.  $T(c \cdot u) = c \cdot T(u)$

Transformasi linier dapat direpresentasikan dengan perkalian matriks, sehingga untuk vektor  $v \in \mathbb{R}^n$  dan matriks  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ , berlaku:

$$T(v) = Av$$

Dalam konteks teknik geomatika, transformasi linier digunakan dalam banyak hal seperti konversi sistem koordinat, rotasi citra, transformasi proyeksi peta, dan analisis deformasi. Berikut beberapa jenis transformasi yang umum digunakan:

1. Translasi (meskipun tidak linier murni, sering dikombinasikan sebagai transformasi afin): Menggeser titik ke posisi baru tanpa mengubah bentuk atau orientasi. Secara umum tidak linier karena tidak memenuhi  $T(0) = 0$ , tetapi dapat diakomodasi dalam transformasi afin menggunakan representasi homogen.
2. Rotasi  
Memutar titik-titik terhadap suatu pusat. Dalam 2D, rotasi terhadap asal dengan sudut  $\theta$  direpresentasikan sebagai:

$$R(\theta) = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$$

Untuk sebarang vektor  $x$ , maka

$$x' = R(\theta)x.$$

3. Skalasi (Perbesaran/Pengecilan)

Mengubah ukuran objek tanpa mengubah bentuk atau arah:

$$S = \begin{bmatrix} s_x & 0 \\ 0 & s_y \end{bmatrix} \text{ untuk 2D} \quad \text{atau} \quad S = \begin{bmatrix} s_x & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 \\ 0 & 0 & s_z \end{bmatrix} \text{ untuk 3D.}$$

4. Refleksi (Pencerminan)

Membalik objek terhadap suatu sumbu atau bidang. Contoh refleksi terhadap sumbu  $x$  dalam 2D:

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

5. Shear (Pergeseran Sudut)

Mengubah bentuk objek dengan menggeser satu sumbu terhadap lainnya. Misalnya, shear horizontal:

$$P = \begin{bmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Agar translasi dapat digabungkan dengan transformasi linier lainnya (rotasi, skalasi), digunakan sistem koordinat homogen. Dalam 2D, vektor  $[x, y]$  ditulis sebagai  $[x, y, 1]$ , dan transformasi linier + translasi direpresentasikan dengan matriks  $3 \times 3$ :

$$T = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & t_x \\ r_{21} & r_{22} & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Matriks transformasi tersebut sering digunakan dalam fotogrametri dan transformasi peta, karena memungkinkan berbagai operasi geometri dilakukan dalam satu langkah matriks.

#### Sifat-Sifat Transformasi Linier

- 1) Preservasi struktur: transformasi linier mempertahankan kolinearitas (titik tetap pada garis lurus) dan rasio jarak (untuk affine).
- 2) Komposisi: dua transformasi linier dapat dikombinasikan menjadi satu dengan mengalikan matriksnya:

$$T_2(T_1(x)) = A_1 A_2 x$$

- 3) Transformasi invers: jika suatu transformasi linier bersifat bijektif (dapat dibalik), maka inversnya juga linier dan dapat dihitung dengan invers matriks.

### 3.4. Nilai Eigen dan Vektor Eigen

Dalam aljabar linier, nilai eigen (*eigenvalue*) dan vektor eigen (*eigenvector*) merupakan konsep penting yang berkaitan dengan transformasi linier yang dilakukan oleh matriks. Secara matematis, diberikan sebuah matriks persegi  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , maka nilai  $\lambda \in \mathbb{R}$  disebut nilai eigen dari  $A$  jika terdapat vektor tak nol  $v \in \mathbb{R}^n$  sedemikian sehingga:

$$Av = \lambda v$$

dimana:

$A$  adalah matriks transformasi,

$v$  adalah vektor eigen,

$\lambda$  adalah nilai eigen.

Artinya, transformasi oleh  $A$  terhadap  $v$  hanya mengubah skala (besar) vektor tersebut, tanpa mengubah arahnya. Secara geometris, vektor eigen adalah vektor yang tetap berada pada arah yang sama setelah dilakukan transformasi oleh matriks  $A$ , meskipun panjangnya mungkin berubah (diperbesar atau diperkecil) tergantung pada nilai  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

Jika  $\lambda > 1$  : vektor diperbesar

Jika  $0 < \lambda < 1$  : vektor diperkecil

Jika  $\lambda = 1$  : vektor tetap panjangnya

Jika  $\lambda = 0$  : vektor diruntuhkan ke titik asal

Jika  $\lambda < 0$  : vektor mengalami pembalikan arah

Nilai eigen diperoleh dengan menyelesaikan persamaan karakteristik:

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

dimana:

$\det$  adalah determinan matriks,

$I$  adalah matriks identitas,

$\lambda$  adalah variabel yang akan dicari (nilai eigen).

Setelah nilai-nilai eigen  $\lambda$  ditemukan, vektor eigen  $v$  dapat ditentukan dengan menyelesaikan sistem persamaan linier:

$$(A - \lambda I)v = 0$$

#### Contoh Numerik Sederhana

Misalkan:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Untuk mencari nilai eigen, kita selesaikan:

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda I) &= \det \begin{bmatrix} 2 - \lambda & 1 \\ 1 & 2 - \lambda \end{bmatrix} = (2 - \lambda)^2 - 1 = 4 - 4\lambda + \lambda^2 - 1 = \lambda^2 - 4\lambda + 3 = 0 \\ \lambda^2 - 2\lambda + 3 &= 0 \Leftrightarrow (\lambda - 3)(\lambda - 1) = 0 \end{aligned}$$

Maka diperoleh  $\lambda_1 = 1$  atau  $\lambda_2 = 3$ .

Untuk masing-masing  $\lambda$ , kita cari  $v$  yang memenuhi  $(A - \lambda I)v = 0$ .

Untuk  $\lambda = 1$  dengan  $v = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$  dan dari  $(A - \lambda I)v = 0$  maka

$$\begin{bmatrix} 2 - 1 & 1 \\ 1 & 2 - 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow x + y = 0 \Leftrightarrow y = -x$$

Jadi vector eigen untuk  $\lambda_1$  yakni  $v = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$  atau kelipatannya.

Untuk  $\lambda = 3$ , dari  $(A - \lambda I)v = 0$  maka

$$\begin{bmatrix} 2 - 3 & 1 \\ 1 & 2 - 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow x - y = 0 \Leftrightarrow y = x$$

Jadi vektor eigen untuk  $\lambda = 3$  yakni  $v = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$  atau kelipatannya.

## 4. APLIKASI ALJABAR LINIER DALAM TEKNIK GEOMATIKA

### 4.1. Transformasi Sistem Koordinat

Dalam kegiatan survei dan pemetaan, transformasi sistem koordinat merupakan salah satu aplikasi paling mendasar dari aljabar linier. Transformasi ini digunakan untuk mengkonversi posisi titik dari satu sistem koordinat ke sistem lainnya, seperti dari sistem lokal ke sistem global (misalnya WGS84), atau dari sistem peta ke sistem gambar. Aljabar linier menyediakan kerangka matematis yang kuat melalui penggunaan matriks transformasi dan operasi vektor, sehingga perhitungan transformasi menjadi sistematis dan efisien. Lebih jauh pembahasan transformasi sistem koordinat dapat ditemukan pada (Anton & Rorres, 2014; Bill et al., 2022; Ghilani, 2010; Gomarasca, 2010; Hassan et al., 2020; Tang & Feng, 2017; Toutin, 2004).

Secara umum, terdapat beberapa jenis transformasi sistem koordinat yang relevan dalam teknik geomatika:

- 1) Transformasi linier (rotasi, skala, refleksi)
- 2) Transformasi afin (rotasi, skala, translasi)
- 3) Transformasi Helmert (rigid body 2D/3D)
- 4) Transformasi proyeksi peta (dari koordinat geodetik ke koordinat bidang)
- 5) Transformasi homogen (menggunakan representasi homogen 3x3 atau 4x4)

#### a. Transformasi Afin 2D

Model umum transformasi koordinat 2D secara afin dapat dituliskan sebagai:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}' = A\mathbf{x} + \mathbf{t} \quad \text{atau} \quad \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} t_x \\ t_y \end{bmatrix} \end{aligned}$$

di mana:

$A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$  adalah matriks transformasi linier (rotasi, skala, shear),

$\mathbf{t} \in \mathbb{R}^2$  adalah vektor translasi,

$\mathbf{x}$  dan  $\mathbf{x}'$  adalah posisi titik dalam sistem asal dan sistem tujuan.

#### b. Transformasi Homogen 2D

Agar semua operasi (termasuk translasi) dapat direpresentasikan sebagai perkalian matriks, digunakan sistem koordinat homogen:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b & t_x \\ c & d & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

Transformasi Koordinat dalam Sistem 3D (Helmert 3D)

Untuk aplikasi pemetaan 3D (misalnya pengukuran GNSS, LiDAR, atau fotogrametri), transformasi dilakukan dalam ruang tiga dimensi. Salah satu transformasi yang umum digunakan adalah Transformasi Helmert 3D, yang melibatkan rotasi, skala, dan translasi:

$$\mathbf{x}' = s \cdot R \cdot \mathbf{x} + \mathbf{t}$$

di mana:

$\mathbf{x}, \mathbf{x}' \in \mathbb{R}^3$  : vektor posisi dalam sistem awal dan sistem hasil,

$s \in \mathbb{R}$  : skala (umumnya sangat dekat dengan 1),

$R \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$  : matriks rotasi ortonormal,

$\mathbf{t} \in \mathbb{R}^3$ : vektor translasi.

Matriks rotasi 3D dapat direpresentasikan dengan kombinasi sudut Euler atau menggunakan pendekatan matriks rotasi kecil untuk keperluan transformasi lokal.

#### Contoh Numerik Sederhana

Jika titik  $P = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$  dalam sistem awal, dan dilakukan transformasi:

rotasi sebesar  $\theta = 90^\circ$

translasi  $t_x = 5, t_y = 1$ ,

maka:

$$R(90^\circ) = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \text{ dan } \mathbf{t} = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix}$$
$$\mathbf{x}' = R \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} + \mathbf{t} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Hasilnya, posisi akhir titik ternyata kembali ke posisi awal karena rotasi dan translasi saling menetralkan dalam konteks ini sebuah ilustrasi sederhana namun menarik.

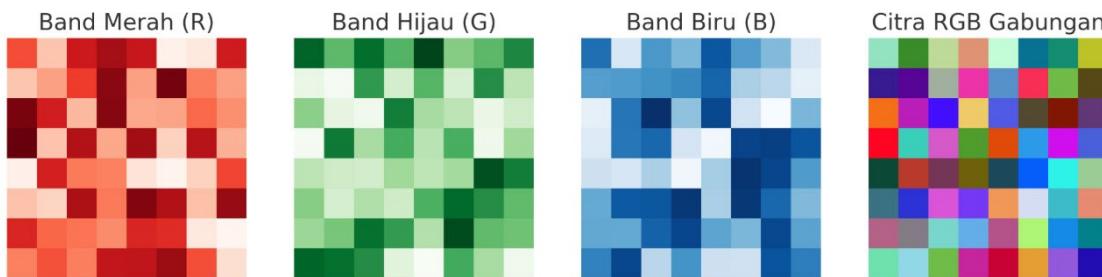
#### 4.2. Pemrosesan Citra Pengindraan Jauh

Pemrosesan citra penginderaan jauh merupakan komponen penting dalam teknik geomatika, terutama dalam kegiatan seperti klasifikasi tutupan lahan, pemantauan perubahan lingkungan, serta ekstraksi informasi spasial. Citra penginderaan jauh disimpan dalam bentuk matriks raster, yang terdiri atas piksel-piksel bernilai digital. Oleh karena itu, teknik aljabar linier, seperti operasi matriks dan transformasi vektor, sangat berperan dalam manipulasi, analisis, dan interpretasi data citra. Lebih jauh pembahasan transformasi sistem koordinat dapat ditemukan pada (Bill et al., 2022; Foody, 2010; Jensen, 2004; Quattrochi & Goodchild, 2023; Toutin, 2004; Unger Holtz, 2007; X. Wang et al., 2022; Z. Wang et al., 2022).

Pada subbab ini dibahas representasi matriks dan operasi aljabar linier sebagai berikut

##### a. Representasi Citra sebagai Matriks

Citra digital dari sensor penginderaan jauh dapat direpresentasikan sebagai matriks 2D untuk citra pankromatik (grayscale) dan Tensor 3D untuk citra multikanal (misalnya RGB atau multispektral). Misal sebuah citra RGB berukuran  $512 \times 512$  piksel dapat direpresentasikan sebagai tiga buah matriks (band merah, hijau, biru), masing-masing berukuran  $512 \times 512$ . Setiap piksel di dalam matriks dapat dianggap sebagai elemen vektor yang nilainya menggambarkan intensitas pantulan elektromagnetik dari permukaan bumi pada panjang gelombang tertentu.



Gambar 2. Ilustrasi representasi citra matriks RGB (Jensen, 2004).

##### b. Operasi Aljabar Linier dalam Pemrosesan Citra

Beberapa operasi aljabar linier yang sering digunakan dalam pengolahan citra penginderaan jauh meliputi:

###### i. Perkalian Matriks dan Filter Konvolusi

Dalam penyaringan (filtering), matriks konvolusi (kernel) diterapkan pada matriks citra. Proses ini melibatkan operasi perkalian dan penjumlahan elemen-elemen matriks, yang secara langsung merupakan operasi aljabar linier.

Contoh: Filter Sobel untuk deteksi tepi horizontal:

$$G_x = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Filter ini dikonvolusikan dengan matriks citra untuk mengekstraksi gradien arah-x.

ii. *Transformasi Principal Component Analysis (PCA)*

PCA adalah teknik reduksi dimensi yang menggunakan nilai dan vektor eigen dari matriks kovarians kanal-kanal citra multispektral. Transformasi PCA menghasilkan komponen utama yang mengandung informasi variansi terbesar dan dapat meningkatkan efisiensi analisis serta mengurangi redundansi antar kanal.

Langkah-langkah utama:

- 1) Normalisasi data citra tiap kanal menjadi vektor kolom.
- 2) Hitung matriks kovarians  $C$ .
- 3) Hitung nilai dan vektor eigen dari  $C$ .
- 4) Gunakan vektor eigen sebagai basis baru untuk mentransformasi data.

iii. *Transformasi Linear Radiometrik*

Koreksi radiometrik linear dapat dilakukan dengan fungsi transformasi yang merupakan fungsi linier dalam bentuk vektor:

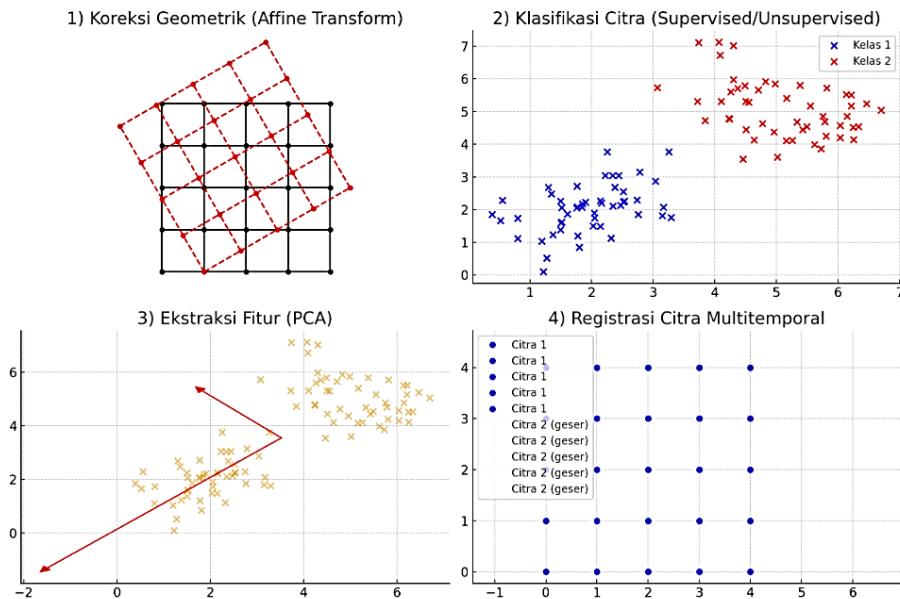
$$D' = aD + b$$

di mana:

- $D$ : nilai digital asli,  
 $a$ : faktor skala (kontras),  
 $b$ : bias (brightness),  
 $D'$ : nilai digital hasil koreksi.

### c. Aplikasi Praktis dalam Teknik Geomatika

Dalam konteks teknik geomatika, aplikasi aljabar linier dalam pemrosesan citra mencakup:



Gambar 3. Ilustrasi aplikasi aljabar linier dalam pemrosesan citra (Jensen, 2004).

1) **Koreksi Geometrik**

Menggunakan matriks transformasi afin atau polinomial untuk mentransformasi citra ke sistem koordinat peta dengan bantuan titik kontrol tanah (Ground Control Points).

2) **Klasifikasi Citra (Supervised dan Unsupervised)**

Dalam klasifikasi supervised (misalnya Maximum Likelihood), digunakan perhitungan jarak Mahalanobis yang memerlukan invers matriks kovarians, suatu operasi aljabar linier tingkat lanjut.

- 3) Ekstraksi Fitur dan Segmentasi  
Melalui konvolusi, PCA, atau algoritma seperti SVD (Singular Value Decomposition) yang berbasis struktur matriks citra.
- 4) Registrasi Citra Multitemporal  
Transformasi linier digunakan untuk menyelaraskan citra dari waktu berbeda agar analisis perubahan dapat dilakukan secara spasial-koheren.

#### d. Contoh Kasus Aplikatif

Misalkan sebuah citra satelit Landsat 8 memiliki 7 kanal. Setelah dihitung, kanal 3, 4, dan 5 menunjukkan korelasi tinggi. Untuk mereduksi dimensi, dilakukan PCA. Prosesnya:

- 1) Dibentuk matriks data  $X \in \mathbb{R}^{n \times 3}$ , dengan setiap baris adalah vektor piksel multispektral (Band 3, 4, 5).
- 2) Hitung matriks kovarians  $C = \frac{1}{n-1} X^T X$ .
- 3) Hitung eigenvalue dan eigenvector dari  $C$ .
- 4) Proyeksikan  $X$  ke basis baru:

$$X_{PCA} = X \cdot V$$

di mana  $V$  adalah matriks kolom berisi vektor eigen utama.

Hasil dari transformasi PCA ini dapat digunakan untuk analisis lebih lanjut seperti klasifikasi vegetasi atau deteksi perubahan.

### 4.3. Sistem Informasi Geografis

Pengolahan data spasial dalam basis data vektor yang melibatkan manipulasi matriks untuk overlay, buffering, dan analisis jaringan. Lebih jauh pembahasan transformasi sistem koordinat dapat ditemukan pada (Bill et al., 2022; Gomarasca, 2010; Jensen, 2004; Quattrochi & Goodchild, 2023; Tang & Feng, 2017).

#### a. Representasi Geometris dan Struktur Data Spasial

Dalam SIG, data spasial direpresentasikan dalam 2 bentuk yaitu dalam bentuk data vektor (titik, garis, poligon) yang selanjutnya direpresentasikan sebagai koordinat (vektor posisi), dan dalam bentuk data raster (grid/piksel) yang selanjutnya direpresentasikan sebagai matriks nilai numerik. Operasi spasial seperti rotasi, penskalaan, translasi, dan proyeksi geometri vektor direpresentasikan dalam bentuk operasi matriks. Misalnya, koordinat titik  $P = (x, y)$  dalam data vektor dapat ditransformasikan melalui perkalian matriks transformasi linier dan translasi:

$$x' = Ax + t \quad \text{atau} \quad \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} t_x \\ t_y \end{bmatrix}$$

#### b. Transformasi Koordinat dan Proyeksi Peta dalam SIG

Salah satu fungsi penting SIG adalah mengelola sistem koordinat dan proyeksi. Ketika data spasial berasal dari sumber yang berbeda (misalnya GNSS, citra satelit, survei lokal), perlu dilakukan transformasi koordinat agar data dapat dianalisis secara terpadu. Transformasi linier (Affine, Helmert) menggunakan matriks transformasi dan proyeksi peta seperti UTM, Mercator, dan Lambert membutuhkan konversi dari koordinat geodetik ke kartesian, yang mencakup operasi vektor dan trigonometri, serta interpolasi grid

#### c. Analisis Spasial Berbasis Aljabar Linier

SIG menyediakan berbagai alat analisis spasial yang menggunakan prinsip aljabar linier:

- i. Overlay dan Intersect

Saat melakukan overlay dua layer vektor (misalnya layer penggunaan lahan dan layer tutupan vegetasi), SIG menggabungkan koordinat geometri dan atributnya. Dalam proses ini, interpolasi titik

potong dilakukan dengan kombinasi linier dari koordinat segmen dan matriks atribut digunakan dalam kueri dan perhitungan logika spasial.

ii. Interpolasi Data (Kriging, IDW)

Dalam interpolasi spasial seperti Kriging dan Inverse Distance Weighting (IDW), prediksi nilai di suatu titik dilakukan melalui kombinasi linier dari nilai titik-titik terdekat:

$$Z(x_0) = \sum_{i=1}^n w_i \cdot Z(x_i)$$

dengan:

$w_i$  : bobot yang dihitung menggunakan jarak (dan kovariansi dalam Kriging),

$Z(x_i)$  : nilai pada titik data.

Penentuan bobot  $w_i$  dalam Kriging memerlukan penyelesaian sistem persamaan linear, biasanya dengan invers matriks kovarians spasial.

iii. Analisis Jaringan (*Network Analysis*)

SIG juga digunakan untuk analisis jaringan jalan, jaringan air, atau utilitas. Operasi seperti pencarian jalur terpendek (misalnya algoritma Dijkstra) melibatkan representasi jaringan sebagai graf berarah dan penyelesaian sistem linier pada matriks bobot (*adjacency matrix*).

**d. Manipulasi Atribut dan Query Spasial**

Data atribut dalam SIG sering kali direpresentasikan sebagai matriks atau tabel data. Operasi query, pengelompokan, dan klasifikasi (misalnya dalam analisis klaster spasial) dapat dipandang sebagai operasi pada vektor baris/kolom dan sering menggunakan teknik seperti; analisis multivariat (*PCA*, *k-means*), normalisasi dan transformasi skala, dan regresi linier spasial.

**e. Contoh Implementasi Aplikatif**

Kasus: Integrasi Data Peta Tutupan Lahan dan Kemiringan Lereng untuk Zonasi Erosi

- 1) Data raster kemiringan direpresentasikan sebagai matriks  $S \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ,
- 2) Data vektor tutupan lahan dikonversi ke raster dan diklasifikasikan sebagai matriks  $L \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ,
- 3) Matriks kombinasi dilakukan dengan operasi elemen-matriks (misalnya penjumlahan bobot atau fuzzy logic),
- 4) Hasil analisis menghasilkan layer zonasi risiko erosi, yang divisualisasikan ulang sebagai layer spasial.

**4.4. Model Permukaan dan Interpolasi**

Penerapan metode aljabar linier seperti least squares untuk interpolasi dan fitting permukaan dalam model digital elevasi (DEM). Lebih jauh pembahasan transformasi sistem koordinat dapat ditemukan pada (Ghilani, 2010; Gomarasca, 2010; Jensen, 2004; Toutin, 2004; Z. Wang et al., 2022).

**a. Representasi Data Permukaan**

Data ketinggian atau atribut spasial lainnya biasanya diperoleh dari; pengukuran langsung (GNSS, total station), sumber citra (LiDAR, stereo fotogrametri), dan observasi tidak langsung (peta kontur, radar). Data ini direpresentasikan sebagai sekumpulan titik dengan koordinat  $(x, y, z)$ , yang dapat dipandang sebagai vektor posisi dalam ruang tiga dimensi.

Model permukaan membentuk relasi fungsi spasial:

$$z = f(x, y)$$

dimana fungsi  $f$  direkonstruksi melalui metode interpolasi.

**b. Interpolasi Linier dan Kombinasi Linear**

Interpolasi dalam konteks aljabar linier merupakan bentuk kombinasi linear dari nilai-nilai di sekeliling suatu titik estimasi. Jika diketahui tiga titik pada bidang  $(x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), (x_3, y_3, z_3)$ , maka nilai  $z$  di titik  $(x, y)$  di dalam segitiga dapat dihitung dengan interpolasi bilinear atau barycentric, yang berbasis sistem linier. Misalnya, interpolasi linier dua dimensi:

$$z(x, y) = a + bx + cy$$

Koefisien  $a, b, c$  dihitung dengan menyelesaikan sistem persamaan linear berdasarkan titik data yang diketahui:

$$\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$$

c. Metode Interpolasi Berbasis Aljabar Linier

i. Inverse Distance Weighting (IDW)

Metode IDW menghitung nilai di suatu titik sebagai rata-rata tertimbang dari nilai titik-titik terdekat:

$$z(x_0) = \frac{\sum_{i=1}^n w_i \cdot z_i}{\sum_{i=1}^n w_i}, \quad w_i = \frac{1}{d_i^p}$$

dimana;

$d_i$  : jarak antara titik  $x_0$  dan titik data  $x_i$ ,

$p$  : parameter pengontrol bobot,

$z_i$  : nilai yang diketahui.

IDW menggunakan kombinasi linier dari nilai-nilai  $z_i$ , dengan bobot sebagai elemen vektor  $w$ .

ii. Kriging

Kriging adalah interpolasi berbasis statistika spasial, dimana estimasi dilakukan dengan meminimalkan variansi kesalahan. Proses tersebut melibatkan; penyusunan matriks kovarians berdasarkan jarak antar titik, penyelesaikan sistem persamaan linear untuk mendapatkan bobot, dan perhitungan nilai interpolasi dengan kombinasi linier.

Model Kriging:

$$Z^*(x_0) = \sum_{i=1}^n \lambda_i \cdot Z(x_i)$$

dimana  $\lambda_i$  diperoleh dari solusi sistem:

$$C \cdot \lambda = c$$

$C$  : matriks kovarians antar titik,

$c$  : kovarians antara titik target dan titik-titik data,

$\lambda$  : vektor bobot.

iii. Spline dan Least Squares Surface Fitting

Interpolasi spline meminimalkan kurvatur permukaan. Pendekatannya dapat berupa *Thin Plate Spline* (TPS) atau *Least Squares Surface Fitting*. Untuk menentukan koefisien  $\beta$  dalam model permukaan

$$z = \beta_0 + \beta_1 x + \beta_2 y + \beta_3 x^2 + \beta_4 xy + \beta_5 y^2 + \dots$$

Model ini dapat diformulasikan sebagai:

$$Z = X\beta$$

dimana:

$Z$ : vektor nilai ketinggian,

$X$ : matriks desain (berisi kombinasi  $x, y$ ),

$\beta$  : vektor parameter.

Solusi parameter diperoleh melalui

$$\hat{\beta} = (X^T X)^{-1} X^T Z$$

yang merupakan bentuk umum solusi regresi linier dalam aljabar linier.

#### d. Aplikasi dalam Teknik Geomatika

Ada beberapa model permukaan dan interpolasi yang dapat digunakan dalam berbagai aplikasi, antara lain;

- 1) Pembuatan DEM dan DSM dari data GNSS, UAV, LiDAR,
- 2) Analisis hidrologi seperti aliran permukaan dan tangkapan air,
- 3) Perhitungan volume untuk reklamasi, galian, atau tambang,
- 4) Zonasi risiko seperti longsor, erosi, atau banjir,
- 5) Visualisasi 3D terrain dalam perencanaan wilayah.

#### e. Contoh Implementasi

Misalnya, data GNSS menghasilkan 200 titik ketinggian acak di area  $2 \text{ km}^2$ . Untuk membuat DEM diperlukan langkah-langkah sebagai berikut

1. Bangun matriks koordinat  $X \in \mathbb{R}^{200 \times 3}$  berisi  $[1, x_i, y_i]$ ,
2. Bentuk vektor ketinggian  $Z \in \mathbb{R}^{200 \times 1}$ ,
3. Selesaikan sistem  $X^T X \beta = X^T Z$ ,
4. Gunakan  $\hat{\beta}$  untuk memprediksi ketinggian pada grid reguler,
5. Hasil di-grid-kan menjadi DEM, siap dianalisis atau divisualisasikan.

### 5. STUDI KASUS

Sebagai contoh, ditampilkan studi kasus penggunaan transformasi matriks rotasi dan translasi untuk mengkonversi data hasil survei GNSS ke dalam sistem koordinat lokal, dan validasi hasilnya terhadap data referensi.

#### a. Deskripsi Lokasi dan data

Lokasi: Desa X, Kabupaten Y, dengan area seluas  $\pm 3 \text{ km}^2$ .

Data yang digunakan:

- 1) Data titik GNSS: 50 titik kontrol geodetik dengan koordinat dalam sistem WGS84.
- 2) Data UAV Fotogrametri: Gambar udara resolusi tinggi dan hasil pemrosesan point cloud (GCP dan DEM awal).
- 3) Sistem koordinat target: UTM Zona 49S (proyeksi transversal mercator).

#### b. Transformasi Sistem Koordinat

Transformasi dari sistem koordinat global (WGS84 geodetik) ke sistem proyeksi UTM dilakukan menggunakan transformasi Helmert 2D (transformasi linier 4 parameter):

$$\begin{bmatrix} X' \\ Y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s \cdot \cos \theta & -s \cdot \sin \theta \\ s \cdot \sin \theta & s \cdot \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} t_x \\ t_y \end{bmatrix}$$

Dengan data GNSS dan UAV (GCP), dihitung parameter transformasi  $s, \theta, t_x, t_y$  menggunakan metode least squares, yaitu menyusun sistem persamaan linier dan menyelesaiakannya dengan rumus:

$$\hat{\beta} = (A^T A)^{-1} X A^T L$$

dimana:

$A$  : matriks koefisien dari titik-titik sumber,

$L$  : vektor observasi perbedaan koordinat.

Hasil:

Skala  $s = 1.000012$ ,

Rotasi  $\theta = 0.0004 \text{ radian}$ ,

Translasi  $t_x = 320.4 \text{ m}, t_y = -150.2 \text{ m}$ .

c. **Pembangunan Model Permukaan**

Setelah semua titik berada dalam sistem UTM, model permukaan dibangun dari 200 titik tinggi hasil UAV (DSM) dan titik GNSS. Interpolasi dilakukan dengan metode Least Squares Surface Fitting menggunakan model kuadratik:

$$z = \beta_0 + \beta_1 x + \beta_2 y + \beta_3 x^2 + \beta_4 xy + \beta_5 y^2$$

Langkah-langkah

1. Bentuk matriks desain  $X \in \mathbb{R}^{200 \times 6}$ ,
2. Bentuk vektor tinggi  $Z \in \mathbb{R}^{200 \times 1}$ ,
3. Selesaikan sistem  $X^T X \beta = X^T Z$ ,
4. Hasil parameter  $\hat{\beta}$  digunakan untuk membentuk permukaan pada grid reguler  $5m \times 5m$ .

Evaluasi hasil interpolasi dengan RMSE (*Root Mean Square Error*) dibandingkan titik validasi lapangan.

d. **Hasil dan Evaluasi**

- 1) Peta kontur dan permukaan 3D berhasil dibentuk dengan detail morfologi yang jelas.
- 2) Akurasi RMSE permukaan hasil interpolasi:  $\pm 0.25 m$ , menunjukkan tingkat ketelitian tinggi.
- 3) Visualisasi hasil; model 3D terrain dari DEM interpolasi dan overlay layer DEM dengan tutupan lahan dan jaringan drainase.

## 6. KESIMPULAN DAN DISKUSI

### 6.1. Ringkasan

Paper ini telah mengkaji secara komprehensif peranan aljabar linier dalam teknik geomatika, baik dari sisi teori matematis maupun aplikasinya. Dari pengantar konsep dasar seperti vektor, ruang vektor, matriks, transformasi linier, serta nilai dan vektor eigen, sampai dengan penerapannya dalam berbagai bidang utama geomatika, seperti: transformasi sistem koordinat, pemrosesan citra penginderaan jauh, sistem informasi geografis (SIG), interpolasi dan pemodelan permukaan.

### 6.2. Kesimpulan

- 1) Aljabar linier merupakan landasan matematis utama dalam hampir seluruh aspek teknik geomatika. Hampir semua proses spasial baik analitik maupun komputasional dapat dirumuskan dalam kerangka aljabar linier.
- 2) Representasi spasial dapat ditangani secara efisien menggunakan struktur matriks dan operasi vektor. Ini mempercepat perhitungan dalam skala besar serta memungkinkan automasi dan integrasi dalam sistem informasi spasial.
- 3) Pemahaman yang kuat terhadap konsep dasar aljabar linier sangat penting bagi mahasiswa dan praktisi geomatika. Ini tidak hanya mendukung pemahaman proses algoritmik, tetapi juga memungkinkan pengembangan metode baru berbasis pemodelan matematis.

### 6.3. Saran dan Rekomendasi

- 1) Pendidikan teknik geomatika perlu memperkuat pengajaran aljabar linier dengan konteks aplikatif, agar mahasiswa dapat melihat keterkaitan langsung antara teori dan praktik.
- 2) Penelitian lebih lanjut dapat difokuskan pada pemanfaatan aljabar linier dalam topik yang lebih maju, seperti *machine learning* untuk geospasial, analisis big data spasial, dan optimisasi jaringan geodetik.
- 3) Pengembangan perangkat lunak geomatika berbasis open-source juga dapat diarahkan untuk memanfaatkan pustaka aljabar linier numerik yang efisien, seperti *NumPy*, *SciPy*, atau *Eigen*, guna menunjang kecepatan dan akurasi.

## DAFTAR PUSTAKA

- Agarwal, R. P., & Flaut, C. (2017). An introduction to linear algebra. In *An Introduction to Linear Algebra*. <https://doi.org/10.1201/9781315208657>
- Anton, H., & Rorres, C. (2000). Elementary Linear Algebra , Applications Version, Student Solutions Manual, 8th Edition. In *Wiley*.
- Anton, H., & Rorres, C. (2014). Elementary Linear: Algebra Applications Version 11th Edition. In *Wiley*.
- Ascher, U. M., & Petzold, L. R. (1998). Computer methods for ordinary differential equations and differential-algebraic equations. In *Computer Methods for Ordinary Differential Equations and Differential-Algebraic Equations*. <https://doi.org/10.1137/1.9781611971392>
- Bill, R., Blankenbach, J., Breunig, M., Haunert, J. H., Heipke, C., Herle, S., Maas, H. G., Mayer, H., Meng, L., Rottensteiner, F., Schiewe, J., Sester, M., Sörgel, U., & Werner, M. (2022). Geospatial Information Research: State of the Art, Case Studies and Future Perspectives. *PFG - Journal of Photogrammetry, Remote Sensing and Geo-information Science*, 90(4). <https://doi.org/10.1007/s41064-022-00217-9>
- Committee, S. (1998). IEEE Standard for Software Verification and Validation IEEE Standard for Software Verification and Validation. In *IEEEInstitute of Electrical and Electronics Engineers* (Vol. 1998, Issue July).
- Foody, G. (2010). Assessing the Accuracy of Remotely Sensed Data: Principles and Practices. *The Photogrammetric Record*, 25(130). [https://doi.org/10.1111/j.1477-9730.2010.00574\\_2.x](https://doi.org/10.1111/j.1477-9730.2010.00574_2.x)
- Ghilani, C. D. (2010). Adjustment Computations: Spatial Data Analysis: Fifth Edition. In *Adjustment Computations: Spatial Data Analysis: Fifth Edition*. <https://doi.org/10.1002/9780470586266>
- Gomarasca, M. A. (2010). Basics of geomatics. *Applied Geomatics*, 2(3). <https://doi.org/10.1007/s12518-010-0029-6>
- Hassan, A., Mustafa, E. K., Mahama, Y., Damos, M. A., Jiang, Z., & Zhang, L. (2020). Analytical Study of 3D Transformation Parameters Between WGS84 and Adindan Datum Systems in Sudan. *Arabian Journal for Science and Engineering*, 45(1). <https://doi.org/10.1007/s13369-019-04206-w>
- Jensen, J. R. (2004). Introductory Digital Image Processing. *Geocarto International*, 2(1).
- Kopylova, N. S., Grigoriev, K. V., Slobodkin, S. M., Romanchikov, A. Y., & Pavlov, N. S. (2023). Working at the concept of an interactive atlas "The history of the Engineering Geodesy Department development". *Geodezija i Kartografija*, 995(5). <https://doi.org/10.22389/0016-7126-2023-995-5-9-17>
- Pommaret, J. F. (2018). New mathematical methods for physics. In *New Mathematical Methods for Physics*.
- Quattrochi, D. A., & Goodchild, M. F. (2023). Scale in Remote Sensing and GIS. In *Scale in Remote Sensing and GIS*. <https://doi.org/10.1201/9780203740170>
- Stroch, J. A. (2024). Introduction to Numerical Linear Algebra [Bookshelf]. In *IEEE Control Systems* (Vol. 44, Issue 1). <https://doi.org/10.1109/MCS.2023.3329927>
- Tang, W., & Feng, W. (2017). Parallel map projection of vector-based big spatial data: Coupling cloud computing with graphics processing units. *Computers, Environment and Urban Systems*, 61. <https://doi.org/10.1016/j.compenvurbsys.2014.01.001>
- Toutin, T. (2004). Geometric processing of remote sensing images: Models, algorithms and methods. *International Journal of Remote Sensing*, 25(10). <https://doi.org/10.1080/0143116031000101611>
- Unger Holtz, T. S. (2007). Introductory Digital Image Processing: A Remote Sensing Perspective, Third Edition. *Environmental and Engineering Geoscience*, 13(1). <https://doi.org/10.2113/gseegeosci.13.1.89>
- Wang, X., Yi, J., Guo, J., Song, Y., Lyu, J., Xu, J., Yan, W., Zhao, J., Cai, Q., & Min, H. (2022). A Review of Image Super-Resolution Approaches Based on Deep Learning and Applications in Remote Sensing. *Remote Sensing*, 14(21). <https://doi.org/10.3390/rs14215423>
- Wang, Z., Ma, Y., Zhang, Y., & Shang, J. (2022). Review of Remote Sensing Applications in Grassland Monitoring. In *Remote Sensing* (Vol. 14, Issue 12). <https://doi.org/10.3390/rs14122903>
- Zhou, X., Ma, J., Zhou, W., & Welo, T. (2023). Forming-based geometric correction methods for thin-walled metallic components: a selective review. In *International Journal of Advanced Manufacturing Technology* (Vol. 128, Issues 1–2). <https://doi.org/10.1007/s00170-023-11948-3>